Hallar la inversa de la matriz A

Hallar

A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución del ejercicio

Ya es sabido que toda matriz cuadrada tiene determinante, no obstante, no toda matriz posee inversa. Un teorema fundamental indica que si | A | <> 0 entonces A es invertible, es decir, si el determinante de una matriz es diferente a cero dicha matriz tendrá inversa.

La inversa se define como: $A^{-1} = A*B = B*A = I$

Donde, $A^{-1} = B$, o sea, la inversa de una matriz A es otra matriz B tal que A*B = I. La matriz identidad. Esto quiere decir que se puede usar una matriz ampliada o aumentada con la matriz identidad y luego llevar la matriz de la izquierda a identidad a través de operaciones de reducción por renglones. Sin embargo, existen una formula genérica.

Por formula general, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (Adjunta\ A)$

Para matrices de orden 2x2 la formula sería entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * \begin{pmatrix} a22 & -a12 \\ -a21 & a12 \end{pmatrix}$$

Método de la matriz aumentada:

La utilización de este método puede hacer el proceso del cálculo del determinante más largo y a veces más engorroso cuando se trata de operar con fraccionarios. Este método consiste en aumentar la matriz original con la matriz identidad, de tal modo que al lado derecho quede ubicada la matriz identidad y al lado izquierdo la matriz original. La idea es básica: hacer la matriz original del lado izquierdo matriz identidad a través de operaciones o reducción por renglones y de ese modo la matriz que al final quede al lado derecho (afectada también por las operaciones con renglones) representara la matriz inversa de A.

Entonces, hallando la inversa de la matriz A usando el método de la matriz aumenta se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Matriz Aumentada}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{mf1(-1)+f3}]{\text{mf1(-2)+f2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{mf2(-1/6)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{mf3(-2)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Como resultado final se obtiene la inversa de la matriz A como:

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{matrix} 0 & -1 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

Puede verificar que $A * A^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$